2.5 Mathématiques 2 - filière PC

2.5.1 Généralités et présentation du sujet

L'objectif de ce problème était de montrer que l'ensemble des fonctions de la forme :

$$x \mapsto P(x)e^{-\frac{x^2}{2}},\ P \in \mathbb{R}[X],$$

est dense dans l'espace des fonctions continues et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.
Pour éviter d'excessives difficultés techniques, on se limitait à approcher les fonctions continues, paires et support compact.
Le sujet avait été conçu pour être extrêmement progressif et balayer un grand nombre de chapitres du programme : fonctions d'une variable réelle, intégration, séries numériques et entières, produits scalaires et espaces euclidiens, espaces normés. Toute sa première partie (7 questions) est constituée uniquement de questions de cours ou très proches du cours. La deuxième partie (10 questions), consacrée à l'étude d'un espace de fonctions de carré intégrable pour un certain poids, et du produit scalaire associé,

exploite largement le cours d'analyse à une variable réelle. Elle demandait un peu plus d'initiative, tout en restant largement accessible. Le niveau de difficulté augmentait significativement dans la dernière partie, afin de permettre aux meilleurs candidats de s'exprimer. Les trois quarts des points du barème étaient concentrés sur les deux premières parties : il était donc possible d'obtenir une bonne note sans aborder la dernière partie.

Cette année encore, le jury a eu plaisir à lire des copies bien rédigées et clairement présentées, qui manifestaient une bonne compréhension du programme, voire une véritable autonomie intellectuelle. À l'inverse, les copies des candidats faisant preuve de négligence ou d'à-peu-prés ont été corrigées sans indulgence.

2.5.2 Analyse détaillée des questions

Q1 - Cette première question ne présentait pas de difficulté, mais elle a été maltraitée par un nombre non négligeable de candidats. Parmi les affirmations fausses le plus souvent lues, citons :

- la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ (ou : se prolonge continûment en 0), donc « il n'y a pas de problème en 0 »,
- $t^{x-1}e^{-t} \sim e^{-t}$, ou $t^{x-1}e^{-t} = O(e^{-t})$, quand $t \to +\infty$.

De nombreux candidats perdent du temps à discuter selon la position de x par rapport à 1. Quelques-uns reproduisent, bien qu'elle ne soit pas demandée, la preuve de la continuité de la fonction Γ sur $]0, +\infty[$, mais beaucoup d'entre-eux omettent de justifier l'intégrabilité de la fonction dominante, ce qui revient à ne rien montrer du tout. Enfin, peu de candidats ont justifié la *stricte* positivité de la fonction Γ, se contentant d'un argument vague de « positivité de l'intégrale ». Dans le cadre du programme, il fallait indiquer que la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ était *continue*, positive et non identiquement nulle (ou bien sûr strictement positive).

Q2 - Cette question a été le plus souvent bien traitée. Le jury attendait bien entendu le contrôle du terme tout-intégré $\left[-t^x e^{-t}\right]_\varepsilon^A$ quand $A \to +\infty$ (souvent bien vu) et $\varepsilon \to 0$ (assez souvent négligé).

Q3 - Certains candidats, soucieux de ne pas utiliser une « règle de d'Alembert adaptée aux séries entières », reviennent au cadre des séries numériques. Pourquoi pas, mais hélas, dans un certain nombre de cas, cela ne fait que révéler une mauvaise compréhension de cette règle : oubli des valeurs absolues, oubli de considérer la *limite* de $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|$ quand $n \to +\infty$, mauvaise exploitation de cette limite. Finalement, un simple « $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ donc le rayon de convergence vaut 1 » aurait été éventuellement discutable, mais plus efficace. Certains candidats écrivent également $a_n = \dfrac{(n+\alpha)!}{n!}$ sans se soucier du fait que α n'est pas supposé entier.

Q4 - Cette question a rarement été intégralement bien traitée. Pour justifier la permutation des symboles, il fallait justifier la convergence de la série de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{t^{n+\alpha}e^{-t}}{n!}x^n\right| dt$, qui découlait de la convergence *absolue* de la série entière $\sum a_n x^n$ en tout point de $]-1, 1[$, ce que très peu de candidats ont vu. La convergence uniforme ou normale sur $]-1, 1[$ de la série entière $\sum a_n x^n$ est souvent mentionnée, alors que d'une part elle est fausse, et que de toute façon elle n'a guère de rapport avec l'interversion d'une somme et d'une intégrale dont la variable est t. Certains candidats, plutôt que de suivre l'indication de l'énoncé, ont préféré utiliser le développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1-x)^{-\alpha-1}$ sur $]-1, 1[$, solution que le jury a bien sûr accepté dès lors que suffisamment de détails étaient donnés.

Q5 - Cette question de cours n'a pas eu beaucoup de succès : très peu de candidats écrivent que *comme F est de dimension finie*, on a $E = F \oplus F^{\perp}$, ce qui permettait ensuite de définir π_F. Au lieu de cela, le jury a souvent lu des formulations dénuées de sens (« le projeté orthogonal d'un vecteur sur F est sa composante dans F ») ou des confusions sur la nature des objets (« le projeté orthogonal d'un vecteur sur F est la plus petite distance à un vecteur de F »).

Q6 - Cette question de cours a, elle aussi, été très rarement bien traitée, beaucoup de candidats se limitant à indiquer qu'il s'agit d'une propriété du cours. Il fallait essentiellement expliquer que $\langle \pi_F(x), e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle$ pour $1 \leq i \leq n$. Certains candidats ont donné des preuves correctes en supposant E de dimension finie, qui ont été partiellement valorisées.

Q7 - Cette question de cours a été mieux traitée que les deux précédentes, mais l'argument essentiel ($\pi_F(x)$ et $x - \pi_F(x)$ sont orthogonaux) n'apparaît pas toujours clairement. Un nombre non négligeable de candidats pense que x et $\pi_F(x)$ sont orthogonaux.

Q8 - Les candidats obtiennent en général l'inégalité $ab \leq \dfrac{a^2+b^2}{2}$, mais beaucoup appliquent hélas ensuite la valeur absolue à cette inégalité pour obtenir « en force » le résultat.

Q9 - Dans cette question, le jury a constaté une *recrudescence sans précédent* de l'usage imprudent de la notation $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx$ avant d'avoir justifié la convergence de l'intégrale. Il est vrai que, « dans la vraie vie », on montre souvent qu'une fonction *positive* est intégrable en majorant son intégrale (qui existe *a priori* dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$) par une quantité finie. Toutefois, ce genre de rédaction n'est pas dans l'esprit du programme de la filière PC, et l'argument devient franchement folklorique en l'absence de l'hypothèse de positivité, ce qui n'émeut guère un certain nombre de candidats pour qui les statuts des intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha e^{-x} x^\alpha f(x)g(x)dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha e^{-x} x^\alpha f(x)^2 dx$ ne sont pas fondamentalement différents. Une rédaction plus soigneuse (majoration de $|x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)|$ pour $x > 0$) était ici attendue.

Q10 - Même remarque qu'à la question précédente.

Q11 - Le plus simple était de constater que, pour tout entier $n \geq 0$, la fonction $t \mapsto t^n$ est élément de E_α grâce à la question **Q1**, et de conclure alors grâce à la question **Q10**. Beaucoup de candidats se perdent dans des rédactions inutilement longues et compliquées. Signalons également l'identité fantaisiste

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x^i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 x^{2i},$$

trop fréquemment trouvée dans les copies.

Q12 - Question le plus souvent très bien traitée.

Q13 - La façon la plus simple de traiter cette question était d'utiliser la formule de Leibniz. Faute d'y avoir songé, de nombreux candidats se sont lancés dans des récurrences pesantes et en général incomplètes, voire franchement malhonnêtes : certains candidats ne parvenant pas à conclure pensent s'en sortir en expliquant « qu'on pourrait montrer, par une *autre* récurrence, que... ». Tout cela a inévitablement été sanctionné. Signalons enfin que $n + \alpha$, pas nécessairement entier, ne peut être le degré d'aucun polynôme.

Q14 - Pour montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx = 0 \Rightarrow f = 0$, beaucoup de candidats oublient de mentionner la continuité de la fonction $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)^2$, en plus de sa positivité. Davantage encore oublient de justifier que si f est nulle sur $]0, +\infty[$, elle l'est sur $[0, +\infty[$ par continuité. Signalons enfin un curieux argument basé sur le fait « qu'un polynôme (lequel ?) ayant une infinité de racines est nul ».

Q15 - Mêmes remarques qu'à la question **Q13**.

Q16 - D'assez nombreux candidats ont bien traité cette question, en effectuant n intégrations par parties successives, et en notant que les termes tout-intégrés étaient nuls grâce à la question précédente.

Q17 - Cette question a donné lieu à d'assez nombreuses escroqueries pour faire surgir miraculeusement la factorielle de n. Pour la traiter correctement, il fallait disposer du degré et du coefficient dominant du polynôme ψ_n.

Q18 - Cette question délicate a rarement été abordée avec succès.

Q19 - Beaucoup de candidats concluent abusivement en conjecturant (ce qui est vrai !) que la somme de la question précédente vaut $\|f_k\|_\alpha^2$.

Les questions suivantes ont rarement été abordées.